Transformatoren bei Hochfrequenz Grundlagen

Mitteilungen aus dem
Institut für Umwelttechnik
Nonnweiler - Saar
Dr.Schau
DL3LH

Vorwort

Wicklungs-Transformatoren bei Hochfrequenz gestatten eine reflexionsfreie Anpassung verschiedener Impedanzpegel. Zwei Stromkreise sind miteinander verkoppelt, wenn zwischen ihnen ein Energieaustausch stattfindet. Erfolgt dieser Energieaustausch durch ein magnetisches Feld, bezeichnet man diese Kreise als magnetisch oder induktiv gekoppelt.

1. Der Übertrager bei Hochfrequenz

Der Übertrager besteht aus einer primären Wicklung mit der Induktivität L_1 und einer sekundären Wicklung mit der Induktivität L_2. Der Strom durch die primäre Induktivität erzeugt einen magnetischen Fluss, der proportional zum Selbstinduktivitäts- koeffizienten L_1 ist. Der erzeugte Fluss besteht aus Koppelfluss und Streufluss. Nur der Koppelfluss erzeugt eine Wirkung im Sekundärkreis.

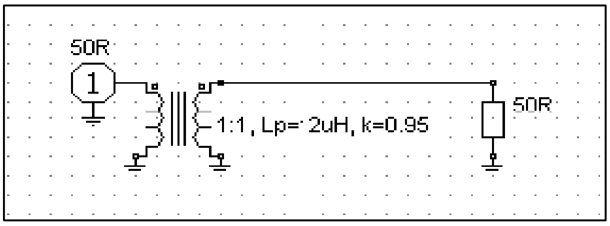

Bild 1: Der Übertrager bei Hochfrequenz

Ist der sekundäre Kreis mit einer Last abgeschlossen dann fließt ein Strom $\underline{I}_2$, verbunden mit einem Rückwirkungsfluss und einem weiteren Streufluss. Nur der Rückwirkungsfluss erzeugt nach dem Induktionsgesetz in der Primärspule eine Gegenspannung, die durch eine entsprechende primäre Spannungskomponente, die Rückwirkungsspannung aufgehoben werden muss.
Der sekundäre Rückwirkungsfluss ist dem primären Fluss entgegengesetzt gerichtet und verkleinert diesen nach Maßgabe der Lenzschen Regel.
Befindet sich in dem felderfüllten Raum keine ferromagnetische Materie und fließt in einem einzelnen Stromkreis ein Strom I, so wird der mit diesem Stromkreis verkettete Fluss

$$\Phi = L * I \qquad \text{(Gl.1)}$$

Der Proportionalitätsfaktor zwischen Strom und Fluss wird als Selbstinduktivitätskoeffizent L oder kurz als Selbstinduktivität bezeichnet.

Bei einer ringförmigen oder unendlich langen Spule ist der mit der Spule verkettete Gesamtfluss

$$\underline{\Phi}g = \mu_o A w^2 / l \qquad \text{(Gl.1)}$$

und mit (Gl.1) wird die Induktivität

$$L = \mu_o A w^2 / l. \qquad \text{(Gl.3)}$$

Die Induktivität ist also proportional zum Windungsquadrat und zur Fläche A und umgekehrt proportional zur Länge der Spule l.

Der magnetische Fluss kann vergrößert werden, wenn die Anzahl der Windungen w vergrößert wird.
Daraus ergibt sich die Definitionsgleichung für die Selbstinduktivität L

$$L = \underline{\Phi}_I \; w / \underline{I} \qquad \text{(Gl.4)}$$

oder in unserem Fall

$$L_1 = \Phi_I \; w_1 / \underline{I}_1. \qquad \text{(Gl.5)}$$

Die Kopplung zwischen zwei Kreisen, wird entsprechend (Gl.4) durch einen Gegeninduktivitätskoeffizienten

$$M_{12} = \Phi_{12} \, w_2 / \underline{I}_1 \qquad \text{(Gl.6)}$$

beschrieben. Dabei ist $\underline{\Phi}_{12}$ der mit dem Kreis 2 verkettete Fluss. Sind mehr als zwei Kreise magnetisch gekoppelt, treten entsprechend mehrere Gegeninduktivitäts- koeffizienten M_{ij} auf.
Nach (Gl.4) und (Gl.5) besteht der Gesamtfluss $\underline{\Phi}_I$ aus einem mit dem sekundären Kreis verketteten Fluss und einem Streufluss, der durch eine Streuinduktivität beschrieben werden kann.
Es gilt somit für den durch den vom Strom $\underline{I}_1$ erzeugten Fluss

$$\underline{\Phi}_I = \underline{\Phi}_{12} + \underline{\Phi}_{1s} \qquad \text{(Gl.7)}$$

und in (Gl.3) eingesetzt gilt

$$L_1 = \underline{\Phi}_{12} \; w_1/\underline{I}_1 + \quad \underline{\Phi}_{1s} \, w_1/\underline{I}_1 \qquad \text{(Gl.8)}$$

Erweitert man den ersten Summanden mit w_2 / w_2 und berücksichtigt (Gl.6), dann wird aus (Gl.8)

$$L_1 = M_{12} \, w_1/w_2 + \; L_{1s} \qquad \text{(Gl.9)}$$

mit der Streuinduktivität $L_{1s} = \Phi_{1s} \, w_1 / \underline{I}_1$.

Wird die Streuung vernachlässigt, vereinfacht sich (Gl.9) zu

$$L_1 = M_{12}\, w_1/w_2\,. \qquad \text{(Gl.10)}$$

Sind primäre und sekundäre Windungszahl gleich, wird L = M.
Der Koppelfaktor k_1 beschreibt den Zusammenhang zwischen gesamt erzeugtem primären Fluss und dem Anteil, der mit dem Sekundärkreis verkettet ist.
Es ist definiert als

$$\underline{\Phi}_{12} = k_1\, \underline{\Phi}_I \qquad \text{(Gl.11)}$$

Fließt im Sekundärkreis ein Strom $\underline{I}_2$, erzeugt dieser entsprechend (Gl 7) einen Gesamtfluss

$$\underline{\Phi}_{II} = \underline{\Phi}_{21} + \underline{\Phi}_{2s} \qquad \text{(Gl.12)}$$

der wieder aus einem mit dem primären Kreis verketteten Fluss und einem Streufluss besteht.
Analog zur (Gl. 9) ergibt sich für die sekundäre Induktivität

$$L_2 = M_{21}\, w_2/w_1 + L_{2s} \qquad \text{(Gl.13)}$$

Bei Vernachlässigung der Streuung vereinfacht sich (Gl 13) zu

$$L_2 = M_{21}\, w_2/w_1 \qquad \text{(Gl.14)}$$

und mit dem Koppelfaktor k_2 wird

$$\underline{\Phi}_{21} = k_2\, \underline{\Phi}_{II}\,. \qquad \text{(Gl.15)}$$

Sind primäre und sekundäre Windungszahl gleich, gilt $\underline{L} = \underline{M}$.
Bei Abwesenheit ferromagnetischer Materialien sind die Koppelfaktoren k_1, k_2 und die beiden Gegeninduktivitäten gleich, was die Berechnung wesentlich vereinfacht. Auch bei ferromagnetischen Kernen kann mit dieser Näherung gerechnet werden, wenn diese nicht in die Sättigung getrieben werden.
Der Koppelfaktor wird mit (Gl 6, 8, 11, 15)

$$k^2 = k_1\, k_2 = (\underline{\Phi}_{12} / \underline{\Phi}_I) * (\underline{\Phi}_{21} / \underline{\Phi}_{II}) = M^2 / (L_1\, L_2)$$

und daraus der bekannte Zusammenhang

$$k = M / \sqrt{L_1\, L_2} \qquad \text{(Gl.16)}$$

dessen Zahlenwert zwischen 0 und 1 liegen kann. Gekoppelte Kreise, deren M sich verändern lässt werden als Variometer bezeichnet.

Wird eine kleine Spule mit dem Radius r_2 in einer großen Spule mit dem Radius r_1 und der Länge l_1 drehbar gelagert, dann ergibt sich z.B. die von dem Drehwinkel abhängige Gegeninduktivität zu

$$M = (\mu_o\, r_2^2\, \pi / l_1) * w_1\, w_2 \cos(\alpha) \qquad \text{(Gl.17)}$$

Bei einem Winkel von $\alpha = 90^o$, die Achsen der beiden Spulen stehen senkrecht aufeinander, wird die Gegeninduktivität Null.

2. Die Eingangsimpedanz

Gehen wir nach Bild 1 von einer gleichsinnigen Wicklung aus, dann ist die Gegeninduktivität
M > 0 und im VZ-Systems nach Kirchhoff gilt für den Eingangskreis

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1\, j\omega L_1 + j\,\omega M\, \underline{I}_2 \qquad \text{(Gl.18)}$$

und für den Sekundärkreis

$$- \underline{U}_2 = j\omega L_2\, \underline{I}_2 + j\omega M\, \underline{I}_1 \qquad \text{(Gl.19)}$$

Ist der Übertrager mit der komplexen Impedanz $\underline{Z}_2 = R_2 \pm j\,X$ abgeschlossen gilt der Zusammenhang

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 * \underline{Z}_2 \qquad \text{(Gl.20)}$$

und wir erhalten für den Sekundärstrom

$$\underline{I}_2 = - \underline{I}_1\, j\omega M / (j\omega L_2 + \underline{Z}_2). \qquad \text{(Gl.21)}$$

Setzen wir (Gl 21) in (Gl 18) ein, berechnet sich die Eingangsimpedanz zu

$$\underline{Z}_1 = \underline{U}_1/\underline{I}_1 = j\omega L_1 + (\omega M)^2 / (j\omega L_2 + \underline{Z}_2) \qquad \text{(Gl.22)}$$

Zur Vereinfachung der Berechnung seien die Verlustwiderstände r_1 und r_2 in den Abschlusswiderständen enthalten. Sollen diese berücksichtigt werden, verändert sich (Gl.22) in

$$\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 + (\omega M)^2 / (r_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_2) \qquad \text{(Gl.23)}$$

3. Der verlustlose Übertrager bei Resonanz

Bei Resonanz des Sekundärkreises wird der Imaginärteil des Zählers in (Gl.22) reell.
Wir schreiben (Gl.22) etwas um und erhalten für den verlustlosen Übertrager bei Resonanz

$$\underline{Z}_1 = j\omega_o L_1 + (\omega_o M)^2 / (\underline{Z}_{R2}) \qquad \text{(Gl.24)}$$

Mit $\underline{Z}_{R2} = \underline{Z}_2 + j\omega oL_2$ als gesamte komplexe Lastimpedanz.
Form man (Gl.24) etwas um, dann wird

$$\underline{Z}_1 = j\omega_o L_1 + (M/L_2)^2 \ * (\omega o)^2 L_2^2 / (\underline{Z}_{R2}). \qquad \text{(Gl.25)}$$

Bei Resonanz gilt $(\omega o)^2 L_2^2 = L_2 / C_2$ und in (Gl.25) eingesetzt wird die Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_1 = j\omega_o L_1 + (M/L_2)^2 \ * L_2 / (C_2 \underline{Z}_{R2}). \qquad \text{(Gl.26)}$$

Bei Resonanz wird der Imaginärteil Null und $\underline{Z}_{R2} = R_2$. Wir erhalten aus (Gl.26) letztendlich

$$\underline{Z}_1 = j\omega_o L_1 + (M/L_2)^2 \ * L_2 / (C_2 R_2). \qquad \text{(Gl. 27)}$$

Das Verhältnis ü = (M/L) ist ein Übersetzungsverhältnis. Man sieht das etwas besser wenn man berücksichtigt, dass bei einem Koppelfaktor k = 1
$M = K\ w_1\ w_2$ und $L_2 = K\ w_2^2$ ist. In (Gl.27) eingesetzt wird daraus

$$\underline{Z}_1 = j\omega_o L_1 + (w_1/w_2)^2 \ * L_2 / (C_2 R_2). \qquad \text{(Gl.28)}$$

Der Ausdruck (L_2/C_2) * 1/ R_2 ist der so genannte Kennwiderstand eines Serienkreises, wenn dieser in Resonanz ist und wir erhalten

$$\underline{Z}_1 = j\omega_o L_1 + (w_1/w_2)^2 \ * \ R_{ab}. \qquad \text{(Gl.29)}$$

Es verbleibt R_{ab}, als der reelle Serienwiderstand des Sekundärkreises, zwischen den beiden Klemmen der sekundären Induktivität L_2. Aus der Resonanzbedingung $(\omega_o)^2 = 1 / (L_2\ C_2)$ kann die Kapazität C_2 berechnet werden, die zur Resonanz des Sekundärkreises führt.

Beispiel 3.1
Ein verlustloser, realer 1: 1 Übertrager sei bei f = 3.6 MHz mit der Impedanz $\underline{Z}_2$ = (200 + j 200) Ω abgeschlossen. Die primäre und sekundäre Induktivität seien $L_1 = L_2 =$ 5 µH, der Koppelfaktor k = 1. Der primäre und sekundäre Blindwider stand der Spulen berechnet sich zu X_L = 113 Ω. Bei Resonanz berechnet sich nach (Gl.29) die Eingangsimpedanz zu $\underline{Z}_1$ = (20.8 + j 84) Ω.

Beispiel 3.2
Zum Vergleich berechnen wir bei einem ***idealen*** 1:1 Übertrager mit gleicher Belastung und gleicher Frequenz f = 3.6 MHz die Eingangsimpedanz. Die Lastimpedanz besteht bei Resonanz des Sekundärkreises nur aus dem Lastwiderstand R_2 = 200 Ω.

Der ideale Übertrager transformiert diese Impedanz im Verhältnis 1:1 auf die Primärseite. An den inneren Eingangsklemmen tritt daher auch R_1` = 200 Ω auf. In Reihe mit diesem Widerstand liegt die primäre Induktivität L_1. Die Eingangsimpedanz ist folglich $\underline{Z}_1$ = (48 + j 86) Ω und identisch mit dem realen, verlustlosen Übertrager bei Resonanz.

Beispiel 3.3
Gegeben ist ein realer, verlustloser Übertrager mit einem Übersetzungsverhältnis 1 : 9 und einem Koppelfaktor k = 1, der bei der Frequenz f = 3.6 MHz mit der Impedanz $\underline{Z}_2$ = (1200 + j 200) Ω abgeschlossen ist.
Bei einem Transformationsverhältnis 1 : 9 ist das Verhältnis der Windungszahlen $w_1/w_2 = 1/3$.
Die primäre Induktivität sei wieder L_1 = 5 µH und daher der primäre Blindwiderstand der Spule L_1 - wie oben - X_L = 113 Ω.
Bei Resonanz des Sekundärkreises berechnet sich nach (Gl 28) die Eingangsimpedanz zu $\underline{Z}_1$ = j 113 Ω + $(1/3)^2$ * (1200) Ω = (133.33 + j 113) Ω.

4. Der Übertrager bei induktiver Last

Ist der Übertrager mit einer induktiven Last $\underline{Z}_2 = R_2 + j\ X_2$ abgeschlossen, so ergibt sich die Eingangsimpedanz mit (Gl.22) für den verlustlosen Übertrager

$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1 + (\omega M)^2 / (R_2 + j\omega L_2 + \ j\ X_2\ ) \qquad \text{(Gl.30)}$$

Beispiel 4.1
Ein verlustloser, realer 1: 1 Übertrager sei bei
f = 3.6 MHz mit der Impedanz $\underline{Z}_2$ = (200 + j 200) Ω abgeschlossen. Die primäre und sekundäre Induktivität seien $L_1 = L_2 =$ 5 µH, der Koppelfaktor k = 0.75.
Der primäre und sekundäre Blindwiderstand der Spulen berechnet sich zu X_L = 113 Ω. Nach (Gl.16) berechnet sich die Gegeninduktivität zu
M = 0.75 * L_1 = 0.75 * 5 µH = 3.75 µH, ent - sprechend einem Blindwiderstand von Xm = 84.81 Ω. Nach (Gl.24) berechnet sich die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_1$ = j 113 Ω + $(84.82\ \Omega)^2$ / (200 + j 313) Ω = (10.43 + j 96.67) Ω =
97.23 Ω $e^{j\ 83.84\ \text{grad}}$. Wir berechnen noch den Eingangsstrom bei einer gemessenen Eingangsspannung von $\underline{U}_1$ = 100 V. Dieser ist $\underline{I}_1$ = 100 V / 97.23 Ω $e^{j\ 83.84\ \text{grad}}$ = 1.028 A $e^{-j\ 83.84\ \text{grad}}$.

Die zugeführte Wirk-Leistung ist $P_1 = U_1\ I_1 \cos(\varphi) = 100\ V * 1.028\ A * 0.107 = 11.03\ W$. Da der Übertrager als verlustlos angenommen wurde, geht diese Wirkleistung auf den Realteil des Lastwiderstandes über.
Der Sekundärstrom muss daher dem Betrage nach $I_2 = \sqrt{11.03\ W/200\ \Omega} = 0.2348\ A$ sein und die Spannung über dem komplexen Abschlusswiderstand $\underline{U}_2 = 0.2348\ A\ (200 + j\ 200)\ \Omega = (46{,}97 + j\ 46.97)\ V = 66.43\ V\ e^{j\ 45\ grad}$, mit dem Betrag $U_2 = 66.43\ V$. Der Strom kann natürlich auch aus (Gl.21) direkt berechnet werden.

5. Der verlustlose Übertrager mit kapazi - tiver Last

Ist der Übertrager mit einer beliebigen kapazitiven Last $\underline{Z}_2 = R_2 - j\ X_2$ abgeschlossen, so ergibt sich die Eingangsimpedanz mit (Gl.23) für den verlustlosen Übertrager zu

$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1 + (\omega M)^2 / (R_2 + j\omega L_2 - j\ X_2) \qquad \text{(Gl.31)}$$

Kapazitive Last ist nur gegeben wenn $\omega L_2 - X_2 < 0$.

Beispiel 5.1
Ein verlustloser, realer 1:1 Übertrager sei bei f = 3.6 MHz mit der Impedanz $\underline{Z}_2 = (200 - j\ 200)\ \Omega$ abgeschlossen. Die primäre und sekundäre Induktivität seien wieder $L_1 = L_2 = 5\ \mu H$, der Koppelfaktor k = 0,75. Der primäre und sekundäre Blindwiderstand der Spulen berechnet sich wieder zu $X_L = 113\ \Omega$. Da der Übertrager u.a. mit einer Serienkapazität Xc = 200 Ω abgeschlossen ist, überwiegt der kapazitive Anteil.
Nach (Gl.16) berechnet sich die Gegeninduktivität $M = 0{,}75 * L_1 = 0{,}75 * 5\ \mu H = 3{,}75\ \mu H$ entsprechend einem Blindwiderstand von Xm = 84,82 Ω. Nach (Gl.30) ist die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_1 = j\ 113\ \Omega + (84{,}82\ \Omega)^2 / (200 - j\ 87)\ \Omega = (30{,}25 + j\ 126)\ \Omega$

6. Der reale Übertrager mit Verlusten

Der reale Übertrager hat ohmsche Verluste in Form des primären und sekundären Verlustwiderstandes der gewickelten Induktivitäten. Die Eingangsimpedanz unter Berücksichtigung der Verlustwiderstände nach (Gl.23) ist

$$\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 + (\omega M)^2 / (r_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_2) \qquad \text{(Gl.32)}$$

wobei die Verlustwiderstände r_1 und r_2 von den Güten der verwendeten Spulen abhängig sind.
Dabei gilt der Zusammenhang $Rv = \omega\ L / Q$ mit Q als Güte der Spulen. Güten von Q = 50 bis etwa 200 können bei Luft-Transformatoren und bis Q = 500 bei Ringkernen erreicht werden. Durch hohe Verlustwiderstände verringert sich der Wirkungsgrad des Übertragers, der möglichst hoch sein sollte.

Beispiel 6.1
Ein realer 1: 1 Übertrager sei bei f = 3,6 MHz mit der Impedanz $\underline{Z}_2 = (200 + j\ 200)\ \Omega$ abgeschlossen. Die primäre und sekundäre Induktivität sei $L_1 = L_2 = 5\ \mu H$, der Koppelfaktor k = 1.
Der primäre und sekundäre Blindwiderstand der Spulen berechnet sich zu $X_L = 113\ \Omega$. Ausgehend von einer Spulengüte Q = 50, sind die primären und sekundären Verlustwiderstände $r_1 = r_2 = 113\ \Omega / 50 = 2{,}26\ \Omega$.
Nach (Gl.23) wird die Eingangsimpedanz
$\underline{Z}_1 = (2.26 + j\ 113)\ \Omega + (113\ \Omega)^2 / (2.26 + j\ 113 + 200 + j\ 200)\ \Omega = (20{,}88 + j\ 84{,}27)\ \Omega = 86.81\ \Omega * e^{j\ 76{,}08\ grad}$.
Messen wir bspw. eine Eingangsspannung $U_1 = 100$ V, dann berechnet sich der Eingangsstrom zu
$\underline{I}_1 = 100\ V / 86.81\ \Omega\ e^{j\ 76.31\ grad} = 1.151\ A\ e^{j\ -76.08\ grad}$.
Die zugeführte Wirk-Leistung ist $P_1 = U_1\ I_1 \cos(\varphi) = 100\ V * 1.151\ A * 0.2366 = 27{,}23\ W$.
Am primären Verlustwiderstand r_1 wird eine Wirkleistung $Pv_1 = I_1^2\ r_1 = (1.151\ A)^2\ 2.26\ \Omega = 2{,}99$ W in Wärme umgesetzt.

Der Betrag des sekundären Stromes berechnet sich nach (Gl.21) zu $I_2 = I_1\ \omega M / |(j\omega L_2 + R_2 + Rv_2 + j\ X_2)| = I_1 * 0.303 = 1{,}151\ A * 0{,}303 = 0{,}348\ A$.
Die an den Lastwiderstand von $R_2 = 200\ \Omega$ abgegebenen Wirkleistung ist $P_2 = I_2^2 * R_2 = (0{,}348\ A)^2 * 200\ \Omega = 24{,}32$ Watt.
Die Verlustleistung im sekundären Verlustwiderstand ist $Pv_2 = I_2^2 * r_2 = (0{,}348\ A)^2 * 2{,}26 = 0{,}273$ W. Die zugeführte Leistung abzüglich der Verlustleistungen in den primären und sekundären Verlustwiderständen muss die abgegebene Leistung ergeben.
Wir rechnen zur Kontrolle: $P_2 = (27{,}23 - 3{,}263 - 0.262)\ W = 23.96\ W$. Die Abweichung zu $P_2 = 24{,}32$ W, $\Delta P = 0{,}353$ W sind Rundungsfehler.

Der Wirkungsgrad des Übertragers wird damit
$ή = P_2 / P_1 = 24{,}32 / 27{,}23 * 100\ \% = 89{,}31\%$.

Um den Wirkungsgrad hoch zu halten muss die Güte der Spulen hoch sein, was man durch Verwendung entsprechend guter Draht-Materialen und auch Ringkernen mit großem A_L-Wert erreicht.

DL3LH, Walter
wa-schau@t-online.de
dl3lh@gmx.de