Antennen Technik

Zugkräfte in Abspannseilen von Drahtantennen

Mitteilungen aus dem Institut
für Umwelttechnik
Nonnweiler-Saar
Dr. Schau
DL3LH

Vorwort:

Der Kurzwellenfunkamateur braucht für sein Hobby eine Antenne. Für die langwelligen Bänder wird in aller Regel eine Drahtantenne verwendet, die im einfachsten Fall zwischen zwei Aufhängepunkten befestigt ist. Bei Einspeisung mittels Koaxkabel oder Zweidrahtleitung ist die Antenne mit einem Gewicht G belastet, das die Antenne nach unten. Die Kraft F nach Bild 1 wirkt der Gewichtskraft G = mg entgegen, hält das System im Gleichgewicht und teilt sich nach Betrag und Richtung in die Zugkräfte in den Abspannseilen auf.

1. Antenne mit zwei Aufhängepunkten und symmetrischer Gewichtsbelastung

Eine Drahtantenne benötigt am Ende des Antennendrahtes ein gut isolierendes Antennenelement und ein isolierendes Abspannseil, weil am Ende der Antenne hohe HF-Spannungen auftreten, die bei direktem Kontakt mit der Umgebung zu hohen Konvektionsströmen und Abstrahlverlusten führen. Das Isolierelement sowie das Abspannseil müssen in der Zugfestigkeit ausreichend dimensioniert sein, damit die Antenne auch bei Belastung durch Sturm und Eis „hängen“ bleibt. Es gilt die beiden Zugkräfte in den Abspannseilen zu berechnen. Bei mittiger Belastung werden die Zugkräfte in den beiden Abspannseilen gleich groß. Zur Berechnung betrachten wir Bild 1.

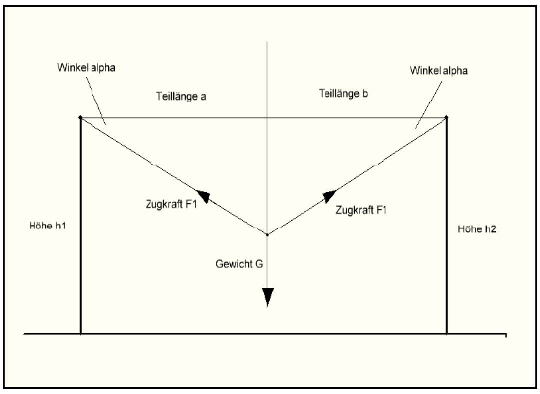


Bild 1: Drahtantenne zwischen zwei Aufhängepunkten gleicher Höhe h

Mit dem Abstand zu einem der Aufhängepunkte a = ½ w und dem Durchhang d gilt:

$$\tan(\alpha) = d/a = 2d/w \qquad \text{(Gl.1.1)}$$

und aus dem Parallelogramm der Kräfte

$$\sin(\alpha) = ½ F / F_1. \qquad \text{(Gl.1.2)}$$

Daraus berechnet sich die zu berechnende Zugkraft in den Abspannseilen zu

$$F_1 = ½ F / \{\sin(\alpha)\} \qquad \text{(Gl.1.3)}$$

Beispiel 1.1:

Eine Kurzwellenantenne wird zwischen zwei gleich hohen Masten mit dem Abstand von w = 65 m gespannt. Die Belastung im mittigen Speisepunkt der Antenne sei G = 10 kg und der Durchhang d = 1 m. Mit einer „Normen“ Erdbeschleunigung von rund $g = 10\ m/s^2$ berechnet sich eine vertikale Kraft von F = 100 N. Diese Ersatzkraft F teilt sich in die beiden gleichen Zugkräfte F_1 in den Abspannseilen auf. Mit (Gl 1.1) berechnet sich der Winkel α = arctan (2 d/w) = arctan (2 m / 65 m) = arctan (2/65) = 1.762391024^o und daraus der Sinus des Winkels $\sin(1{,}762391024^o)$ = 0,30754675. Mit (Gl.1.3) wird die Zugkraft in den Abspannseilen $F_1 = ½ F / \{\sin(\alpha)\}$ = ½ 100 N / 0,030754675 = 1625,77 N oder mit alten Einheiten $F_1 \approx 162{,}57$ kp.

Wer nicht so gerne mit Winkeln rechnet, sondern lieber mit dem Pythagoras, kann die Zugkräfte im Antennenseil auch aus folgender Gleichung, die sich aus der Zerlegung der Kräfte ergibt,

$$F_1^2 = (G/2)^2 + (G\,w/4\,d)^2 \qquad \text{(G.1.4)}$$

berechnen. Die Ableitung der (Gl.1.4) ist ebenso einfach wie die der (Gl.1.3). Man zerlegt die Kräfte im dem rechtwinkligen Dreieck und berücksichtigt, das die Innenwinkel im Dreieck als Summe 180° ergeben.

Beispiel 1.2:
Eine Kurzwellenantenne wird zwischen zwei gleich hohen Masten mit dem Abstand von w = 65 m gespannt. Die Belastung im mittigen Speisepunkt der Antenne sei G = 10 kg und der Durchhang d = 1 m. Mit einer „Normen“ Erdbeschleunigung von rund g = 10 m/s² berechnet sich eine vertikale Kraft von F = 100 N. Nach (Gl 1.4) ergibt sich für die Zugkraft im Abspannseil

$$F_1^2 = (100\text{ N}/2)^2 + (100\text{ N } 65\text{ m}/4 * 1\text{m})^2 = (50\text{ N})^2 + (25 * 65\text{ N})^2 = 2643125\text{ N}^2$$

und daraus die Zugkraft F_1 = 1625,77 N. Das Ergebnis ist natürlich identisch mit dem Ergebnis von Beispiel 1.1, weil die Daten übernommen wurden. Vielleicht ist die Methode nach (Gl.1.4) doch einfacher, man hat ja die freie Auswahl.

2. Antenne mit zwei unterschiedlichen hohen Aufhängepunkten und unsym - metrischer Belastung

In vielen Fällen ist die Antenne unsymmetrisch belastet und die Aufhängepunkte sind unterschiedlich hoch. Die beiden Zugkräfte in den Abspannungen sind in diesem Fall nicht gleich. Es gilt diese beiden Zugkräfte F_1 und F_2 zu berechnen. Dazu betrachten wird Bild 2.

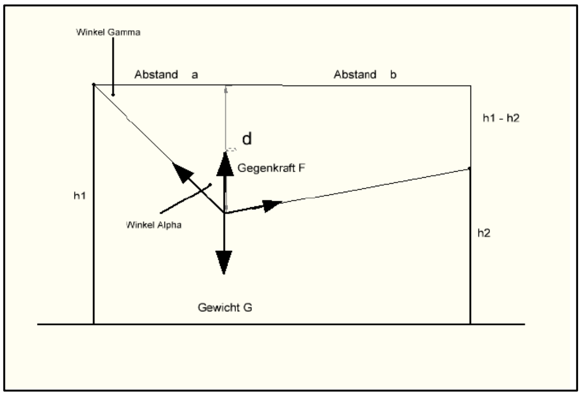


Bild 2: Kräfteverteilung an einer an zwei Punkten aufgehängten Drahtantenne bei unsymmetrischer Gewichtsbelastung und unterschiedlich hohen Aufhängepunkten

Bei unsymmetrischer Speisung der Antenne ergeben sich die beiden unterschiedlichen Längen a und b nach Bild 2. Deren Summe ist der Abstand zwischen den beiden Aufhängepunkten w, der leicht mit einem Bandmass gemessen werden kann. Die Aufhängepunkte haben in der Praxis meist unterschiedliche Höhe und sollen mit h_1 bzw. h_2 bezeichnet werden. Für die Berechnung der Kräfte F_1 und F_2 in den Antennen-Drähten und damit in den beiden Abspannseilen reichen einfache Beziehungen der Geometrie völlig aus. Im Speisepunkt der Antenne wirkt die Gewichtskraft F = G g = mg, bedingt durch Speiseleitung, Balun usw.

Mit dem Durchhang d der Antenne gegenüber der gedachten Waagerechten nach Bild 2 berechnet sich

$$\tan(\gamma) = (d / a) \qquad \text{(Gl.2.1)}$$

bzw. der Winkel γ aus der Umkehrfunktion des Tangens zu

$\gamma = \text{arc}\ \{\tan (d/a)\}$. (Gl.2.2)

Der Winkel α nach Bild 2 berechnet sich aus der Winkelsumme von 180^o am rechtwinkligen Dreieck zu $\alpha + \gamma + 90^o = 180^o$ und daraus

$\alpha = 90^o - \gamma$. (Gl.2.3)

Der Winkel δ zwischen der gedachten Waagerechten am Aufhängepunkt 2 berechnet sich entsprechend

$\tan (\delta) = | d - (h_1 - h_2)| / b$ (Gl.2.4)

und daraus der Nachbarwinkel φ zum Winkel α wieder aus der Winkelsumme entsprechend (Gl.2.3)
$\varphi + \delta + 90^o = 180^o$

d.h. $\varphi = 90^o - \delta$. (Gl.2.5)

Im Parallelogramm der Kräfte sind damit bekannt: die Kraft F und die beiden Winkel α und φ. Der fehlende Winkel σ im schiefwinkligen Dreieck berechnet sich aus der Summe der Innenwinkel zu $\sigma = 180^o - \alpha - \varphi$.

Mit dem Sinussatz können damit die Zugkräfte F_1 und F_2 berechnet werden. Es gilt am schiefwinkligen Dreieck das Verhältnis

$\sin (\sigma) : \sin (\alpha) = F : F_2$ (Gl.2.6)

und daraus

$F_2 = F * \sin(\alpha) / \sin(\sigma)$. (Gl.2.7)

Für die noch Berechnung der noch fehlenden Zugkraft F_1 gibt es zwei Möglichkeiten, mittels Sinus- oder Kosinussatz. Wir entscheiden uns zur Übung für den Kosinus-Satz und überprüfen das Ergebnis mit dem Sinus-Satz. Es gilt

$F_1^2 = F_2^2 + F^2 - 2\ F_2\ F \cos (\varphi)$ (Gl.2.8)

und mit (Gl 2.5) wird aus (Gl 2.8)

$F_1^2 = F_2^2 + F^2 - 2\ F_2\ F \sin (\delta)$. (Gl.2.9)

Es gilt natürlich auch mit dem Sinus Satz

$F_1 = F\ \sin (\varphi) / \sin(\sigma)$. (Gl 2.10)

Aus (Gl.2.7) bis (Gl.2.10) und dem Parallelogramm der Kräfte wird ersichtlich das, je strammer die Antenne gespannt wird, umso größer sind die beiden Zugkräfte und werden immer mehr dem Betrage nach gleich. Wird die Antenne mittig gespeist wie bei einem Dipol, dann ist die Gewichtskraft G mittig und die beiden Kräfte $F_1 = F_2$ sind dem Betrage gleich groß und nehmen ein Maximum an. Eine Antenne mit mittiger Speisung hat immer die größten Zugkräfte im Antennendraht und in den beiden Abspannseilen. Wird in Abschnitt 2, a = b (mittige Speisung der Antenne) und $h_1 - h_2 = 0$, dann berechnet man die Kräfte besser mit dem Ansatz nach Abschnitt 1 als umständlich mit den (Gl.2.1) bis (Gl.2.9)!

Beispiel 2.1:
Eine unsymmetrisch aufgehängte Antenne der Länge l = 54 m wird zwischen den zwei Aufhängepunkten mit dem Abstand A_L = 65 m aufgehängt. Der Abstand a von dem einen Aufhängepunkt zum Speisepunkt beträgt a = 10 m. Der Aufhängepunkt 1 und 2 habe die gleiche Höhe. Der Durchhang im Speisepunkt sei d = 1 m, der durch einfache Längenmessung ermittelt wurde. Im Aufhängepunkt nehmen wir ein Gewicht (Masse) von G = 10 kg an, die sich aus der Last der Zuleitung und aus dem Eigengewicht der Antenne zusammen - setzt. Bei einer Erdbeschleunigung von g = 9,80665 m/s^2 berechnet sich daraus die Kraft F = 10 x 9,80665 N = 99,0665 N. Wir rechnen zur Vereinfachung mit dem Faktor 10. Danach wird die Kraft F im Speisepunkt der Antenne F ≈ 100 N.

Nach (Gl 2.2) berechnet sich der Winkel γ zwischen der gedachten Waagerechten und dem Seil vom Aufhängepunkt 1 zum Gewicht G, γ = arc{tan (d/a)} = arctan (1m/10m) = 5,710593137 Grad und daraus der Winkel α = 90^o – γ = 90^o – 5,710593137 ^{o} = 84,28940686 Grad.
Entsprechend gilt für den Winkel zwischen der gedachten Geraden und Abspannseil 2 δ = arctan|d – (h_1–h_2)| / b = arctan{(1m/(65m – 10m) = arctan (1/55) = 1,041626676 Grad und daher der Wechselwinkel im schiefwinkligen Dreieck φ = 90^o – δ = 88,95837332 Grad. Der fehlende Winkel im Parallelogramm der Kräfte ergibt sich wieder aus Winkelsumme zu σ = 180^o - α - φ = σ = (180 - 84,28940686 - 88,95837332)Grad = 6,752219816 Grad. Aus (Gl 2.7) wird die Kraft F_2 = F * sin (α) / sin (σ) = 100 N * sin(84,28940686^o) / sin(6,752219816^o) = 850,37 N. Mit (Gl 2.9) ist $F_1^2 = F_2^2 + F^2 – 2\ F_2\ F \sin(\delta)$ = {846,29^2 + 100^2 – 2 * 846,29 * 100 * 0,018178813} N^2 und daraus aus der Wurzelfunktion F_1 = 850,37 N. Die Zugkraft im Abspannseil 1 ist daher F_1 = 850,37 N oder mit den alten Maßeinheiten F_1 ≈ 85 kp.

Wie die Rechnung zeigt sind die Zugkräfte in beiden Abspannseilen, in diesem Fall, annähernd gleich. Diese Kräfte treten im statischen Fall auf, d.h. keine Windlast, kein Eigengewicht und keine Belastung durch Eis und Schnee auf der Antenne. Die tatsächlich auftretenden Kräfte sind ein Vielfaches der berechneten. Verständlich, dass bei Sturm oder Sturmböen so manche Kurzwellen-Antenne auf dem Boden landet. Für die Dimensionierung der Zugfestigkeit der Abspannseile sollte daher mit einem Faktor von etwa 5 gerechnet werden, damit unerwünschte Einsätze an der Antenne - besonders bei miesem Wetter - entfallen können. Nichts ist schlimmer als nicht funken zu können, weil die Antenne am Boden liegt.

Vergleicht man die Ergebnisse nach Beispiel 2.1 mit dem Beispiel 1.1 wird ersichtlich, dass die Zugkräfte bei unsymmetrischer Antennenspeisung geringer sind. Das wird auch sofort aus dem Parallelogramm der Kräfte ersichtlich. Je näher das Gewicht G am Aufhängepunkt 1 ist, des geringer wird die Kraft F_2 und die Zugkraft F_1 nähert sich dem Betrage nach der Kraft F. Rückt der Speisepunkt noch näher an die Aufhängung übernimmt letztendlich der Aufhängepunkt 1 das gesamte Gewicht G und die Kraft F_2 wird Null.

Die vertikalen Kräfte an den Aufhängepunkten wurden bislang vernachlässigt. Das Gesamtgewicht der Antenne nebst Zuleitung und anderer Komponenten muss von den beiden Abspannpunkten je zur Hälfte getragen werden. In der Antennenpraxis ist das ohne Bedeutung. Bei Hochspannungsleitungen und einem Gewicht der Seile im Tonnen Bereich sieht die Sache dann ganz anders aus.

Um einigermaßen richtige Ergebnisse zu bekommen muss mit mindestens 6 hinter dem Komma gerechnet werden. Für heutige Taschenrechner natürlich kein Problem. Für schnelle Ergebnisse, anstelle der lang-weiligen Rechnung, reicht meist auch eine einfache zeichnerische Lösung völlig. Dazu zeichnet man die Antennen-Anlage im Maßstab auf ein DinA4 Blatt. Die Kräfte werden entsprechend in einem passenden Maßstab z.B. 5 N ≡ 1cm eingezeichnet. Aus dem Parallelogramm der Kräfte können dann die Zugkräfte direkt durch Längenmessung mit einem Lineal ermittelt werden.

Beispiel 2.2:
Bei starkem Wind oder Windböen treten im Antennenseil und in den Tragseilen dynamische Kräfte auf, die ein Vielfaches der unter Beispiel 1 berechneten Kräfte liegen. Zur Abschätzung dieser Kräfte gegen wir von einer zusätzlichen Beschleunigung des Gewichte G von b = 5 m/s^2 aus. Die Gegenkraft F erhöht sich daher nach Newton (Kraft = Masse x Beschleunigung) auf F = 10 kg * (9,80665m/s^2 + 5 m/s^2) = 148,06 N. Die Kräfte berechnen sich mit den (Gl.2.1 – 2.9).

Beispiel 2.3:

Bislang blieb das Eigengewicht der Antenne unberücksichtig. Auch kann Eis und Schneebelag zum zerbersten ungenügend dimensionierte Antennenabspannungen führen. Wir nehmen an, dass der Durch - messer des Kupfer Antennendrahtes wegen des Skin-Effektes und zur Vermeidung von Verlusten der Antenne zu D = 3 mm gewählt wurde. Kupfer hat eine spezifische Masse von 8920 kg/m^3. Das Gewicht der der Antenne - ohne die Zuleitung - ist daher G_{eigen} = V * 8920 kg/m^3 = (3 mm^2) x (π/4) x 54 m x 8920 kg/m^3 = 3,40 kg. Angenommen die Antenne und die Abspannseile nach Beispiel 1 sind mit zusätzlichen Eislast von 3 mm beaufschlagt. Das Eisvolumen ist ungefähr V = 65 m x 3 mm x 3 mm = 585 cm^3. Wir rechnen mit der Dichte von 1 g/ cm^3 (Dichte von Eis ist geringer als die von Wasser und beträgt ρ = 0.9168g/cm^3). Es lastet auf dem Antennendraht eine zusätzliche Eislast von G = 585 cm^3 x 1g/cm^3 = 585 g = 0.585 kg. Das Eigengewicht des Antennendrahtes und das Gewicht des Eises zusammen ist Gges= 0,585 kg + 3,4 kg = 3,985 kg. Mit dem Gewicht der Antennenspeiseleitung evtl. inkl. Balun von rund 10 kg, wie in Beispiel 1.1 angenommen, wird ein Gesamtgewicht von G ≈ 14 kg im Speisepunkt der Antenne erreicht.

Bei ruckartigen Bewegungen, wie bei einer Aufhängung zwischen Bäumen oder bei Verwendung von Gegengewichten über Rollen anstelle von Spannfedern, wie in der Fachliteratur fälschlicherweise immer wieder vorgeschlagen, können diese Kräfte weit überschritten werden.

3. Antenne mit 3 Aufhängepunkten

Manche Funkamateure schwören auf Kurzwellenantennen in Form einer Ganzwellenschleife mit 3 und manchmal 4 Aufhängepunkten. Der Aufwand für diese Form einer Kurzwellen-Antenne ist enorm hoch. Wir wollen die Kräfte in den Abspannseilen für diese Anordnung berechnen. Geht man im Idealfall von einem gleichschenkligen Dreieck aus, dann ist der innen liegende Winkel φ = 60^o. Die im Abschnitt 1 berechneten Kräfte in der Antenne und in den Abspannseilen teilen sich entsprechend dem „Parallelogramm der Kräfte“ auf die Abspannseile auf. Da jedem Aufhängepunkt zwei Antennenseile angreifen, müssen sich die Kräfte im Seil entsprechend erhöhen. Zur Berechnung betrachten wird das Bild 2 und gehen davon aus, das die Abspannungen in Richtung der Winkelhalbierenden liegen. An den Aufhängepunkten A, B und C sind

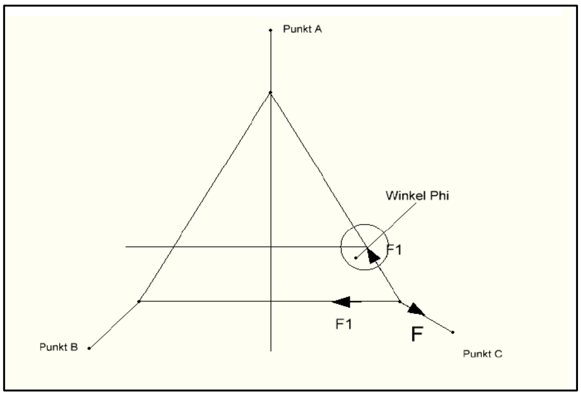


Bild 3: Eine an drei Punkten aufgehängte Drahtantenne für den Kurzwellenbereich

die Abspannseile befestigt, deren Kräfte berechnet werden müssen. Da an jedem Aufhängepunkt zwei nach Abschnitt 1 berechnete Kräfte angreifen ist die Berechnung übersichtlich. Nach Bild 2 seien die Kräfte im Seil mit F_1 bezeichnet und die Kraft im Abspannseil F. Ist das Abspannseil in Richtung der Winkelhalbierenden gespannt, dann sind die beiden Kräfte F_1 im Seil dem Betrage nach identisch. Am gleichschenkligen Dreieck ist der Winkel φ nach Bild 2, φ = 120^o. Aus dem Kosinussatz der Geometrie berechnet sich mit cos (120^o) = - ½

$$F^2 = F_1^2 + F_1^2 – 2 F_1 * F_1 \cos (120^o) = 2 F_1^2 + F_1^2 = 3 F_1^2 \qquad \text{(Gl.3.1)}$$

und daraus

$F = \sqrt{3}\, F_1$ (Gl.3.2)

wobei der Faktor √3 aus der Berechnung zwischen Leiter- und Strangspannung in 3 Phasen Systemen bekannt ist.

Beispiel 3.1

Eine Schleifenantenne habe den Umfang U = 84 m, d.h. pro Schenkel hat die Antenne eine Länge von l = 28 m. Wir berechnen nach Abschnitt 1, Beispiel 1.1 die Kräfte F_1 in den Seilen bei einer mittigen Gewichtsbelastung von G = 10 kg entsprechend einer Kraft F_1 = 100 N. Mit den Werten aus dem Beispiel 1.1 und (Gl.10) berechnet sich die Zugkraft im Abspannseil zu F = 1,7320 * 1625 N = 2814,50 N. Die Kräfte in den beiden anderen Seilen sind geringer, weil hier keine Einspeisung vorhanden ist. Die exakte Berechnung erfolgt nach Abschnitt 5. Hier wurde angenommen, dass in jedem der drei Antennenbereiche eine Einspeisung vorhanden ist, was natürlich nicht der Fall ist. Jedenfalls ist man bei der Berechnung der Kräfte auf der sicheren Seite.

4. Antenne mit 4 Aufhängepunkten

Bei einer Schleife mit 4 Aufhängepunkte vereinfacht sich die Rechnung weiter, da die Innenwinkel zwischen den Antennenseilen 90° sind und der Pythagoras angewendet werden kann. Aus der einfachen Beziehung $F^2 = F_1^2 + F_1^2 = 2\, F_1^2$ berechnet sich die Zugkraft im Abspannseil zu einem der Abspannpunkte zu

$F = \sqrt{2}\, F_1$ (Gl.4.1)

die geringer ist als bei einer Antenne mit 3 Punkt-Aufhängung. Da die einzelne Seillänge kürzer ist und damit die Belastung pro Seil geringer, ist auch die Zugbelastung in der Abspannung kleiner. Was ja sofort verständlich wird.

Wie die Beispiele zeigen sind die Zugkräfte in den Abspannungen einfacher Drahtantennen doch enorm hoch. Die Abspannseile müssen diese Zugkräfte aufnehmen und entsprechend ausgelegt werden. Die Her - steller geben die max. Zugkräfte von Abspannseilen an, die nicht überschritten werden dürfen. Stärkere Abspannungen haben ein Eigengewicht, das ähnlich wie das Eigengewicht des Antennendrahtes berücksichtig werden muss. Dimensioniert man die Abspannungen mit einem Sicherheitsaufschlag von 4 bis 5, dann bleibt die Antenne auch bei starken Stürmen „oben“, es sein denn man verwendet zur Aufrechter - haltung der Zugspannung im Antennendraht ein Gegengewicht geführt über eine Rolle. Diese Anordnung wird oftmals in der Literatur angepriesen und ist aber falsch. Nach Newton gilt: Kraft = Masse mal Beschleunigung und die Zugkräfte können bei dynamischer Belastung enorm groß werden und selbst „ausreichend“ dimensionierte Antennen abreißen.

5. Die endgespeiste Antenne

Eine endgespeiste Antenne hat einen Durchhang d durch das eigene Gewicht des Antennenseiles. Mit welchen Zugkräften muss an den beiden Aufhängepunkten gerechnet werden und welcher Durchhang stellt sich ein, bevor die Antenne reißt? Ein Seil überträgt Kräfte grundsätzlich nur in Seilrichtung sonst wäre es kein Seil, sondern ein Balken. Aus dem Parallelogramm der Kräfte am Ende der Antenne ist ersichtlich, dass die Kraft F im Seil mit der Gewichtskraft G des Seiles und dem horizontalen Winkel γ in etwa (Bild 1) über

$F = G / \tan(\gamma)$ (Gl.5.1)

zusammenhängt. Für die exakte Berechnung ist ein wenig Mathematik erforderlich, was im Anhang beleuchtet wird.

Beispiel 5.1

Eine endgespeiste Antenne habe die Länge (2 λ für 3.6 MHz) l = 166 m. Der Durchmesser des Kupfer - drahtes ist D = 3 mm. Die Antenne wird verschieden stramm gespannt, so dass sich wahlweise die Winkel gegenüber der Waagerechten von **1.** 25°, **2.** 10° und **3.** 1° einstellen. Wie hoch sind für diese 3 Winkel die Zugkräfte in den Aufhängepunkten? Das spezifische Gewicht von Kupfer ist 8920 kg/m^3. Das Gewicht der Antenne ist G = Volumen * spezifisches Gewicht = ¼ D^2 π l * 8920 kg/m^3 = ¼ $(3\ mm)^2$ * 166 m = 12,84 kg. Die Gewichtskraft ist F = 12,84 kg* 9,80665m/s^2 = 125,83 N.
Bei einem Winkel γ = 25° ist nach (Gl.5.1) die horizontale Zugspannung im Seil F = 125,83 N / tan (25°) = 269,84 N, bei einem Winkel von γ = 10° ist die Seilspannung F = 713,61 N und bei dem Winkel γ = 1° ist die Zugkraft im Seil schon F = 7208,79 N oder mit den alten Einheiten F ≈ 721 kp. Bei total waagerechter Antenne (nicht möglich) sind die Zugkräfte unendlich groß.

Die Zugkräfte in den Abspannungen werden umso größer, je mehr die Antenne gespannt wird. Für die Abstrahleigenschaften der Antenne ist es nicht erforderlich eine möglichst „stramme“ und waagerechte Antenne zu haben, was fälschlicherweise immer wieder behauptet wird /1/.

Anhang Berechnung der Kettenlinie der frei hängenden Antenne:

Die Berechnung der Kettenlinie ist ein klassisches Problem der Variationsrechnung und keinesfalls trivial. Man denkt sich ein Seil von gewisser Masse m und Länge l, das an seinen Enden aufgehängt ist. Die Seilkurve ist das Ergebnis der kleinst möglichen potentiellen Energie des Seils. Die frei hängende Antenne hat die Form der Kettenlinie und ist der Graph der Funktion f(x) = cosh(x) oder auch $f(x) = ½\ (e^x + e^{-x})$.

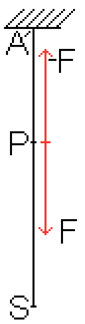
A1: Die Gleichung der Kettenlinie:

Zur Herleitung der Formel der Kettenlinie $f(x) = ½\ (e^x + e^{-x})$ braucht man ein wenig einfache Physik.

Wir setzen voraus, dass die Kette oder das Seil möglichst einfach ist:

1. Die Masse des Seiles sei homogen auf die Länge verteilt und die Masse ist proportional zur Länge Der Proportionalfaktor q = m/l ist die Längendichte. Die Masse ist dann m = q * l und die Gewichtskraft G = m g = q * l * g mit g als Erdbeschleunigung.

2. Die Länge der Kette bleibe konstant, auch wenn eine Zugkraft auf sie wirkt. – Druckkräfte werden nicht weiter gegeben.



Um das Prinzip der Berechnung verstehen zu können hier eine einfache Einführung:
Befestigt man ein Seil/Kette der Länge l = AS an einem Ende, so hängt sie auf Grund ihrer Masse und Schwerkraft vertikal. Im Punkt A wirkt die gesamte Gewichtskraft F = mg nach unten, aufgehoben durch die gleich große Reaktionskraft -F in der Aufhängung. In einem beliebig gewählten Punkt P auf der Kette wirkt die Gewichtskraft des Kettenstücks PS. In Punkt S wirkt keine Kraft.

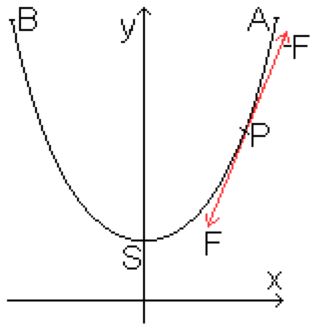


Bild A1

Wird dieses Seil in den Punkten A und B aufgehängt, so stellt sich eine parabelähnliche Kurve ein. Nach unten zieht die Gewichtskraft, zur Mitte hin wirken Kräfte, die die Kette zusammenhalten. In den Aufhängepunkten A und B wirken die entsprechenden Gegenkräfte. Kräfte wirken nur in Richtung der Kette, sonst würde die Kette verformt werden. Die Kette ist im Gleichgewicht. Für die Berechnung setzen wir die Kette in ein kartesisches Koordinatensystem, symmetrisch zur y – Achse.

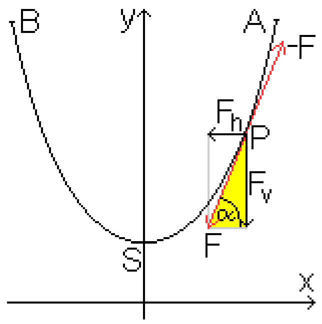


Bild A2

In einem beliebig gewählten Punkt P auf der Kette wirken die Tangentialkräfte F und die Gegenkraft -F. Man kann die Kraft F ersetzen in die horizontal wirkende Kraft F_h und die vertikal wirkende Kraft F_V. Die Kraft F_h ist die Kettenspannung. Sie ist in jedem Punkt dem Betrage nach konstant, auch im tiefsten Punkt S. F_V ist gleich der Gewichtskraft des Kettenstücks zwischen dem Punkt S und dem Punkt P und entspricht der Hälfte der Gewichtskraft des ganzen Seiles.

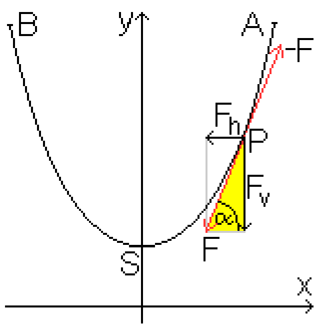


Bild A3

Für den Steigungswinkel α gilt $\alpha = \arctan(\alpha) = F_V/F_h$ (Gl.A1)
und daraus $\tan(\alpha) = F_V/F_h$.

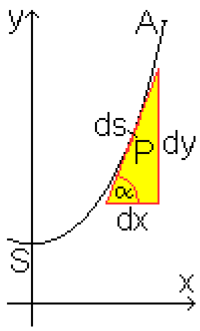


Bild A4

Da die Kette in jedem Punkt eine andere Krümmung hat, ist eine Grenzwertbetrachtung erforderlich. Man greift daher ein kleines Kettenstück ds heraus. Es lässt sich ein Dreieck aus den Differentialen ds, dx und dy bilden. Die Steigung ist dann

$$\tan(\alpha) = dy/dx = F_v/F_h \qquad \text{(Gl.A2)}$$

Aus $\tan(\alpha) = F_V/F_h$ und $\tan(\alpha) = dy/dx$ folgt $dy/dx = F_V/F_h$ oder $y' = F_V/F_h$ oder auch $F_V = F_h\, y'$ (Gl.A3)

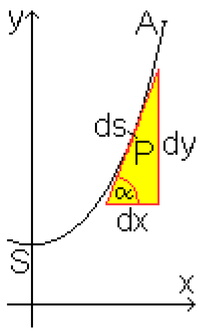


Bild A5

Für das Differential ds gilt nach Phytagoras $ds^2 = (dx^2 + dy^2)$

$ds = dx \sqrt{[1+(dy^2/dx^2)]} = dx \sqrt{(1+ y'^2)}$ (Gl.A4)

F_V und F_h werden zur besseren Übersicht durch andere Variable ersetzt: Die Gewichtskraft $F_V = G(x)$ wird durch das Bogenstück PS bestimmt und hängt von x ab. Die Horizontalkomponente ist F_h = konstant und beschreibt die Ketteneigenschaft. Sie ist eine Konstante k. Es gilt mit $F_V = F_h\, y'$ daher auch die Beziehung $G(x) = k\, y'$. und das Differential ergibt

$dG/dx = k\, y''$. (Gl.A5)

In Punkt 1 der Voraussetzungen wurde die Längendichte $q = m/l$ eingeführt. Es ist entsprechend $dm = q\, (ds)$ mit ds als infinitesimales Stück der Seillänge l. Die Gewichtskraft ist

$g\, (dm) = g\, q\, (ds) = dG$ (Gl.A6)

Mit (Gl A4) und (Gl A5) ist

$dG = g\, q * \sqrt{(1+y'^2)}\, dx$ oder auch $dG/dx = g\, q \sqrt{(1+y'^2)}$ (Gl.A7)

folglich ist

$k\, y'' = g\, q * \sqrt{(1+y'^2)}$ (Gl.A8)

oder

$ay'' - \sqrt{(1+y'^2)} = 0$ mit der Abkürzung (Gl.A9)

$a = k/g\, q$. (Gl.A10)

Die Differentialgleichung $ay'' = \sqrt{(1+y'^2)}$ ist eine Bestimmungsgleichung für die Kettenlinie. Schaut man in eine mathematische Formelsammlung dann sieht man, das diese Euler-Lagrange-Differentialgleichung durch Trennung der Variablen gelöst werden kann. Die Lösungsschar ist allgemein $y = a \cosh(x/a+c_1) + c_2$, im Wesentlichen also

$y = a \cosh(x/a)$ (Gl.A11)

und erfüllt damit die Bedingung der DGL. Der direkte Lösungsweg ist ein wenig umständlich und soll hier nicht nachgestellt werden. Einfacher ist es die Lösung zu nehmen, zu differenzieren und in die DGL einzusetzen und damit zu überprüfen ob diese Funktion tatsächlich eine Lösung der DGL ist.

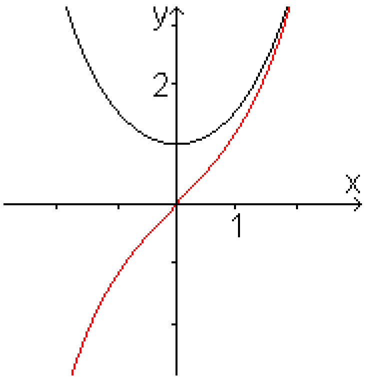
Wir rechnen Stück für Stück nach und setzen die Ergebnisse in die DGL ein:

Für $y = a \cosh(x/a)$ oder auch $y = (a/2)(e^{x/a} + e^{-x/a})$ gilt die erste Ableitung $y' = (1/2)(e^{x/a} - e^{-x/a})$ und die zweite Ableitung $y'' = 1/(2a)\,(e^{x/a} + e^{-x/a})$, daraus wird dann: $(1 + y'^2) = 1 + (1/2)^2(e^{x/a} - e^{-x/a})^2 =$
$= 1 + (1/4)[(e^{x/a})^2 - 2(e^{x/a}e^{-x/a}) + (e^{-x/a})^2] = 1 + (1/4)(e^{x/a})^2 - (1/2) + (1/4)(e^{-x/a})^2 =$
$= (1/4)[(e^{x/a})^2 + 2(e^{x/a}e^{-x/a}) + (e^{-x/a})^2] = (1/4)(e^{x/a} + e^{-x/a})^2$ und daraus
$\sqrt{(1+y'^2)} = ½\,(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a\,[1/(2a)]\,(e^{x/a} + e^{-x/a}) = ay''$ -------------------------- was zu beweisen war.

Also erfüllt die Funktionsschar $f_a(x) = a \cosh(x/a)$ oder $f_a(x) = ½\, a\,(e^{x/a} + e^{-x/a})$ die DGL und beschreibt die Kettenlinie. a ist ein Parameter ungleich Null. Wir erhalten als Lösung der Differentialgleichung den Graph $f_a(x) = a * \cosh(x/a)$.

Hinweis für die Ableitung der e-Funktion:

Wegen der grundlegenden Eigenschaft der e-Funktion $(e^x)' = e^x$ ist cosh (x) leicht zu differenzieren und zu integrieren.



Ist z.B. $f(x) = \cosh(x) = ½\,(e^x + e^{-x}) = (1/2)e^x + (1/2)e^{-x}$ dann gilt für die erste Ableitung $f'(x) = (1/2)e^x - (1/2)e^{-x} = ½\,(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$>; das ist der Sinus Hyperbolikus. Die rote Kurve im obigen Graf ist der Hyperbel Sinus. Entsprechend wird die zweite Ableitung von f(x), $[f''(x) = ½\;(e^x + e^{-x})]$ und es ergibt sich wieder $f(x) = f''(x) = \cosh(x)$.

Eine andere Methode zur Bestimmung der Seilkräfte F in den Aufhängepunkten erfolgt mit Hilfe des Energiesatzes. Hierzu stellt man sich vor, dass das Seil in einem der Aufhängepunkte über eine Umlenkrolle läuft, die die Kraft in eine horizontale Richtung umlenkt. Um das Seil um eine sehr kleine Strecke ds hinauszuziehen, muss man die Energie dE = F ds aufwenden und daraus die Kraft F = dE/ds. Zur Berechnung von dE vergleicht man die Energie des ursprünglichen Seils mit der Energie des um ds verkürzten Seiles und so erhält ein überraschend einfache Ergebnis. Hier sei auf die einschlägige Literatur der Mechanik /3/ verwiesen.

Beispiel A1.1:

Berechne die Länge eines Seiles mit dem Mastabstand w = 200 m für den Spezialfall w = 2a. Die Funktion der Seilkurve war nach (Gl.A11) $f(x) = a \cosh(x/a)$ und die erste Ableitung $y' = (1/2)(e^{x/a} - e^{-x/a}) = \sinh(x/a)$. Aus (Gl.A4) berechnet sich für das infinitesimale Kurvenstück der Zusammenhang $ds = dx\sqrt{[1+(dy^2/dx^2)]} = dx\,\sqrt{(1+y'^2)}$ und daraus die halbe Länge des Seiles

$$½\, s = \int_0^{w/2} dx\,\sqrt{(1+y'^2)} = \int_0^{w/2} dx\,\sqrt{\{(1+\sinh^2(x/a)\}} = \int_0^{w/2} dx \cosh(x/a) = a \sinh(x/a)\Big|_0^{w/2} = 100\text{m} \sinh(1) = 117{,}52\text{ m}$$

wobei der Zusammenhang $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ verwendet wurde. Die gesamte Seillänge beträgt S = 117,52 m * 2 = 235,04 m bei einem Mastabstand von w = 200 m. Die Aufhängung hat in diesem Beispiel die Höhe $h = f(x|w/2) = a \cosh(1) = 100$ m * 1,54 m = 154 m. Da a = 100 m ist, ist der Durchhang d = 54 m.

Beispiel A1.2:

Berechne die Gewichtskraft eines Antennenseilers mit den Daten aus Beispiel 5.1. Es ergab sich die Masse des Seiles zu M = 12,84 kg oder auch q = 12,84 kg/235,04 m = 0,005461 kg/m. Mit (Gl.A7) galt dG/dx = g q √(1+y'²) bzw. dG = g q dx √(1+y'²). Den Ausdruck dx √(1+y'²) haben wir in Beispiel A1 schon berechnet. Danach ergab sich eine Seillänge von S = 235,04 m. Die Gewichtskraft ist daher F = 0,005461 kg/m * 9.81m/s^2 * 235,04 m = 125,96 N.

Einfacher geht's natürlich direkt in dem man die Masse des Seiles mit der Erdbeschleunigung multi - pliziert. (F = 12,84 kg * 9,81m/s^2) = 125,96 N. Jeder Aufhängepunkt muss die Hälfte der vertikalen Gewichtskraft F_v tragen, also $F_{v1,2}$ = 62,98 N.

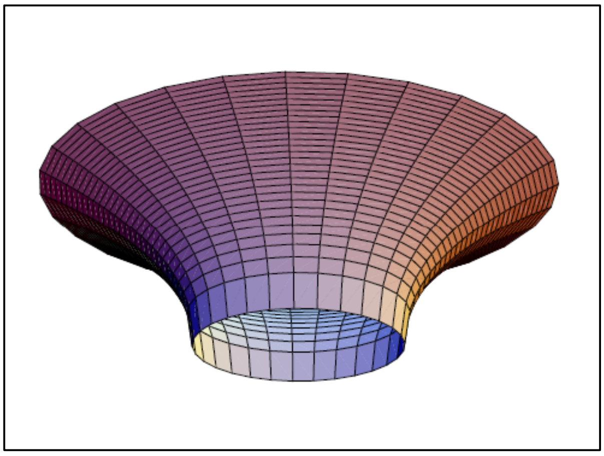


Bild 4: Der Rotationskörper der cothx Funktion (Cotangens-Hyperbolikus-Funktion)

Wird das Antennenseil über eine Rolle geführt, dann ist die Zugkraft identisch der Seilkraft. An der Rolle entsteht wieder ein Parallelgramm der Kräfte. Diese Abspann-Kräfte müssen von der Rolle nebst Lager und deren Abspannung gehalten werden. In der Praxis betragen diese Kräfte im Aufhängepunkt das ganze bis doppelte Gewicht des Seiles der Antenne und das ist ein guter Richtwert. Das Gewicht der Antenne kann leicht mittels Personen-Waage bestimmt werden.

$$F = m\, g/2 * \coth (w/2a) \qquad \text{(Gl.A12)}$$

Die (Gl.A12) zeigt, wie die Kraft bei zunehmender Seilspannung die halbe Gewichtskraft (beide Aufhän - gungen teilen sich die Gewichtskraft) mg/2 um den Faktor coth (w/2a) übersteigt. Der coth x ist praktisch 1 für sehr kleine Werte von *a*, aber ungefähr (2a/w) für sehr große Werte, was aus der Reihenentwicklung sichtbar wird.

Beispiel A1.3

Eine Antenne aus dem Profi Bereich für ein Schiff wiegt 60 kg. Die Gewichtskraft ist F ≈ 60 kg * 10 N = 600 N. Das ist die vertikale Kraft, die von jeder Aufhängung zur Hälfte getragen werden muss, also F_v = 300 N. Die horizontale Kraft an einer Aufhängung beträgt bei einem Winkel von α = 2 Grad rund F_h = 8590 N oder auch rund 858 kp.

Beispiel A1.4:

Als Beispiel sei ein zwischen zwei Pfosten mit dem Abstand w aufgehängtes Seil der Länge l gegeben. Die Pfosten sind gleich hoch und befinden sich bei x = − w / 2 und x = + w / 2. Um den Krümmungsradius *a* zu berechnen, schreiben wir die Seillänge *l* als Funktion von a. Nach (Gl.A4) galt $ds = dx \sqrt{[1+(dy^2/dx^2)]} =$ $= dx \sqrt{(1+ y'^2)}$ und daher die gesamte Länge des Seiles ($\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$)

$$S = \int_{-w/2}^{w/2} dx \sqrt{(1+ y'^2)} = 2\, a \sinh (w/2a).$$

Diese Beziehung legt *a* in Abhängigkeit von *w* und S eindeutig fest. Da man keinen geschlossenen Ausdruck für *a* angeben kann, muss der Wert mit einem numerischen Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungen berechnet werden.

Zuletzt liest man aus der Abbildung A2 und der Bedingung x = (*w* /2) die Beziehung für die Höhe des Aufhängepunktes

$$h_1 = h_2 = a \cosh (w/2a) \qquad \text{(Gl.A13)}$$

mit $h = a + d$

und d als Durchhang nach Bild 1. (siehe Beispiel 1.1)

A2: Federkräfte

Für die Erhaltung der Zugspannung und zum Ausgleich von Beschleunigungen durch Wind und Wetter ist eine Feder im Antennenseil notwendig, kein Gewicht, wie immer wieder fälschlicherweise vorgeschlagen wird. Eine Feder die durch die Gewichtskraft m g belastet wird, wird um eine Stecke s gedehnt, die proportional zur angehängten Masse m ist. Die Federkraft, die für das Gleichgewicht der Kräfte notwendig ist können wir in der Form

$F_{feder} = D * s$ schreiben. (Gl.A14)

Die Kraft die eine Feder auf einen Massenpunkt ausübt, wächst proportional zur Dehnung der Feder. Die "Proportionalitätskonstante D ist die Federkonstante". Im Kräfte -gleichgewicht gilt also: mg = D s. Durch besondere Konstruktion gibt es auch Federn deren Kraft nichtlinear mit der Auslenkung zunimmt. Dann ist D keine Konstante sondern eine Funktion der Auslenkung s, z.B. $F = D^{1.5}\, s$ usw.

A2.1 Parallel- und Reihenschaltungen von Federn:

Beim Zusammenfügen mehrerer Federn gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder werden die Federn parallel oder in Serie geschaltet. Bei beiden Möglichkeiten kann eine Gesamtfederkonstante angegeben werden, die so genannte Ersatzfederkonstante. Schaltet man zwei Federn gleicher Federkonstante parallel, dann verringert sich die Auslenkung um den Faktor s`= ½ s. Werden zwei Federn gleicher Federkonstante in Reihe geschaltet und mit gleicher Last belastet, dann verdoppelt sich die Auslenkung der Federn um den Faktor 2.

Daher berechnet sich bei der Parallelschaltung von N Federn mit den Federkonstanten

$D_1, D_2, \ldots\ldots\ldots\ldots D_N$

die Ersatzfederkonstante als Summe der Einzelkonstanten und zwar in der Form

$$D = D_1 + D_2 + D_3 + + + + + + D_N. \qquad \text{(Gl.A15)}$$

Bei der Reihenschaltung (mehrere Federn aneinander gehängt) ergibt sich die Ersatzfederkonstante aus

$1/D = 1/D_1 + 1/D_2 + 1/D_3 + + + + + 1/D_N$ (Gl.A16)

Die Formeln (A15) und (A16) für die Parallel – bzw. Serienschaltung ist den meisten Amateuren bekannt von der Parallel- bzw. Serienschaltung von Leitwerten Y, bzw. der Parallelschaltung von Widerständen, also nichts Neues in Waldhagen.

Beispiel A2.1

Zwei Federn mit der Federkonstanten D_1 = 100N/cm und D_2 = 175 N/cm werden parallel geschaltet um die Zugkräfte einer über eine Rolle geführten Antennenabspannung aufzunehmen. Bei dynamischer Belastung werden die Federn auf 2 cm ausgelenkt. Welche Kraft tritt in dieser Spitzenbelastung auf?
Die Ersatzfederkonstante ist nach (Gl.A14) D = 100N/cm + 175 N/cm = 275 N/cm. Bei einer Auslenkungen von 2 cm tritt eine Federkraft von F = 275 N/cm * 2 cm = 550 N auf.

Beispiel A2.2

Die Federn nach Beispiel A2.1 werden um die Zugkräfte zu verringern in Reihe geschaltet. Welche Kräfte treten jetzt bei einer Auslenkung von 2 cm auf? Die Ersatzfederkonstante nach (Gl.A15) ist $D = (D_1 * D2)/(D_1 + D_2)$ = (100 * 175) N/cm / 275 = 63,63 N/cm. Bei einer Auslenkung von 2cm treten Kräfte von F = 63.63 N/cm * 2cm = 127,27 N auf.

Beispiel A2.3

Im Beispiel A2.2 treten Kräfte nach Beispiel A2.1 auf. Welche Auslenkung treten bei den in Reihe geschalteten Federn auf? Mit der berechneten Ersatzfederkonstanten von D = 63,63 N/cm berechnen wir nach Umstellung der (Gl.A14) eine Auslenkung von s = 550 N/63,63 N/cm = 8,64 cm. Da die Federn eine unterschiedliche Federkonstante haben lenken diese auch unterschiedlich aus. Die Feder mit der Federkonstanten D_1 = 100 N/m lenkt um s_1= 550 N / 100N/cm = 5,5 cm aus. Die zweite Feder mit der Federkonstanten D_2 = 175 N/cm lenkt um s_2= 550 N / 175N/cm = 3,14 cm aus. Die Summe der Auslenkung ist $s = s_1 + s_2$ = 3,14 cm + 5,5 cm = 8,64 cm und stimmt natürlich mit dem oben berechneten Wert überein.

Zusammenfassung:

Zu einer guten Antennenanlage für den Kurzwellen Bereich gehört die richtige Dimensionierung von Tuner, Antennenzuleitung und Antenne, damit die teuer erzeugte HF-Leistung auch von der Antenne abgestrahlt wird. Eine gute Isolierung der Antenne gegenüber der Umgebung ist ebenso wichtig, damit Verluste durch Kriechströme vermieden und die Antenne mit möglichst hohem Wirkungsgrad betrieben wird. Üblicherweise werden zur Isolierung Keramik Isolatoren verwendet, die durch Verschmutzung und HF-Kriechströme leicht die isolierende Wirkung einbüßen. Durch Reihenanordnung mehrerer solche Isolierelemente mit zwischengeschalteter Abspannung kann eine gute Dauerfunktion erreicht werden. Alle Halterungen der Antenne müssen für die auftretenden Zugkräfte ausgelegt werden. Bei einer „frei“ hängenden Antenne, wie ein Langdraht mit Einspeisung am Ende, treten normalerweise Zugkräfte von ganzen bis doppelten Gewicht des Seiles auf. Um auf der sicheren Seite zu liegen rechnet man am besten mit einem Sicherheitsaufschlag von 3 bis 5.

DL3LH, Walter
wa-schau@t-online.de
dl3lh@gmx.de
www.heide-holst.de

Literatur

/1/ „Die Antenne macht die Musik“, Dr. Schau, DL3LH,

/2/ „Vergleich Dipol – Schleife“, Dr. Schau, DL3LH

/3/ „Grundlagen der Statik“, Prof. Eduard Pestel, Uni Hannover